

پیش بینی و فیلتر بهینه خطی

Linear Prediction and Optimal Filtering

۱-۷ سیگنال تصادفی

تحلیل آماری

۱. **تابع نمونه:** فرض کنید سیگنال مورد نظر توسط یک دستگاه اندازه گیری شده باشد و سیگنال $x_1(n)$ بدست آمده باشد، به سیگنال $x_1(n)$ یک تابع نمونه *sample function* می گویند.
۲. **فرایند تصادفی:** اگر دستگاههای دیگری نیز کمیت مورد نظر را اندازه گیری کرده باشند آنگاه سیگنالهای $x_2(n)$ و ... $x_L(n)$ بدست می آید. به مجموعه $S=\{x_1(n), \dots, x_L(n)\}$ تابع زمانی مجموعه، یا فرایند تصادفی *Stochastic Process* می گویند و با $X(n, S)$ نشان می دهند که به اختصار $X(n)$ می نویسیم.
۳. **متغیر تصادفی:** دنباله های $x(n=i)$ دنباله های متغیر تصادفی هستند.
۴. **گشتاورهای متغیر تصادفی:** اگر متغیر تصادفی $X(n=i)$ چگالی احتمالی $P_{xi}(x, i)$ داشته باشد، گشتاور m ام آن اینگونه بدست می آید.

$$E[X(i)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m P_{xi}(x, i) dx$$

که میانگین آن

$$E[X(i)] = m_{X(i)}$$

و واریانس آن در $n=i$

$$\sigma_{X(i)}^2 = E[X(i)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_{xi}(x, i) dx$$

که $E[X(i)^2]$ امید ریاضی مربع سیگنالهای مجموعه S در زمان $n=i$ است.

۵. **فرایند تصادفی مطلقا ایستا:** برای متغیرهای تصادفی $X(1)$ و $X(2)$ و ... می توان تابع چگالی احتمالی مشترک تعریف کرد. فرایند تصادفی $X(n)$ **مطلقا ایستا** *Strict-sense Stationery* است اگر تابع چگالی احتمالی مشترک تابع (شیفت) نقاط n نباشد. یعنی اینکه

$$\rho_{X_1, X_2, X_3, \dots}(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots) = \rho_{X(t+m_1), X(t+m_2), X(t+m_3), \dots}(x_{n_1(t+m_1)}, x_{n_2(t+m_2)}, x_{n_3(t+m_3)}, \dots)$$

۶. فرایند تصادفی ایستای گسترده: فرایند تصادفی $X(n)$ را ایستا گسترده Wide Sense Stationary می خوانند اگر میانگین و تابع همبستگی آن مستقل از n باشند.

$$E(X(t)) = E(X(t)) = \dots = E(X(n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x, n) dx = m_X$$

$$E[X_{n+k} X_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{n+k} x_n \rho_{X_{n+k}, X_n}(x_{n+k}, x_n) dx_{n+k} dx_n = \Phi_{XX}(k)$$

در رابطه فوق X حقیقی فرض شد.

Example 2.2-1 Determine if the following process is wide-sense stationary.

$$x(t) = A \cos t + B \sin t \quad \text{for } A \text{ and } B \text{ uncorrelated, zero mean, with variance } \sigma^2$$

$$m_x(t) = E\{A\} \cos t + E\{B\} \sin t = 0$$

$$\begin{aligned} R_x(t, k) &= E\{x(t)x(t+k)\} - m_x(t)m_x(t+k) = E\{x(t)x(t+k)\} \\ &= E\{(A \cos t + B \sin t)[A \cos(t+k) + B \sin(t+k)]\} \\ &= E\{A^2\} \cos t \cos(t+k) + E\{B^2\} \sin t \sin(t+k) \\ &= \sigma^2 \cos[t - (t+k)] \end{aligned}$$

$$\text{or } R_x(t, k) = R_x(k) = \sigma^2 \cos k$$

Thus the process is wide-sense stationary.

۷. همبستگی و واریانس خودی و متقابل: دیگر روابطی که در حالت کلی می توان نوشت از این قرارند.

خود همبستگی

$$\Phi_{XX}(n, m) = E(X_n X_m^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_n x_m^* \rho_{X_n, X_m}(x_n, x_m) dx_n dx_m$$

کواریانس خودی

$$\gamma_{XX}(n, m) = E[(x_n - m_{X_n})(x_m - m_{X_m})^*]$$

$$\sigma_{X_n}^2 = \gamma_{XX}(n, n)$$

$$\gamma_{XX}(n, m) = \Phi_{XX}(n, m) - m_{X_n} m_{X_m}^*$$

$$\Phi_{XY}(n, m) = E[X_n Y_m^*]$$

$$\gamma_{XY}(n, m) = \Phi_{XY}(n, m) - m_{X_n} m_{Y_m}^*$$

متغیر متقابل
کواریانس متقابل

برای مثال استوارترین این رابطه بدین روش ساده شود

$$E(X(n)) = m_x$$

$$P_{xx}(l) = E[X(n+l)X^*(n)]$$

$$Y_{xx}(l) = E[(X(n+l) - m_x)(X(n) - m_x)^*]$$

$$Y_{xx}(l) = P_{xx}(l) - |m_x|^2$$

$$\sigma_x^2 = Y_{xx}(0) = P_{xx}(0) - |m_x|^2$$

$$Y_{xy}(l) = Y_{yx}(-l)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{xx}(l) = m_x m_x^*$$

آرمر پیریک باشد

$$P_x = E[|X(n)|^2] = P_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2$$

توان متوسط

توابع همبستگی و کواریانس توابعی مزدوج متقارن هستند.

۸. مستقل آماری: اگر برای متغیرهای تصادفی X و Y رابطه

$$P_{x,y}(x,y) = P_x(x)P_y(y)$$

برقرار باشد X و Y مستقل آماری هستند این امر محاسبات را ساده می کند و تابع چگالی مشترک را بصورت ضرب توابع چگالی متغیرهای تصادفی در آورده و محاسبه انتگرال چندگانه را به حاصل ضرب انتگرال های تک بدل می کند.

۹. مستقل خطی: اگر

$$E(xy) = E(x)E(y)$$

باشد X و Y مستقل خطی یا غیر همبسته هستند. اگر X و Y مستقل آماری باشند حتما مستقل خطی هستند ولی عکس آن صحیح نیست.

۱۰. طیف توابع همبستگی و کواریانس

$$S_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_{xx}(l) e^{-j\omega l}$$

$$\Gamma_{xy}(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_{xy}(l) e^{-j\omega l}$$

$$P_x = E[|x(n)|^2] = P_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega$$

اگر $x(n)$ حقیقی باشد S_{xx} و Γ_{xx} توابعی زوج خواهند بود این توابع اطلاعات فاز $x(n)$ را ندارند لذا براساس آنها نمی توان $x(n)$ را باز سازی کرد.

۱۱. تخمین توابع آماری سیگنال ارگودیک *Ergodic*: اگر سیگنالی ارگودیک باشد توابع و پارامترهای آماری را از یک

تابع نمونه می توان بدست آورد.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) x(n+m)^*$$

می توان نشان داد که این دو تخمین وقتی $N \rightarrow \infty$ برود با واریانس صفر (احتمال ۱) به مقدار اصلی mx و $\gamma_{xx}(m)$ میل می کنند. مشروط بر آنکه این دو کمیت مقدار محدودی داشته باشند.

در عمل اطلاعات موجود $x(n)$ به N محدود می شود لذا روابط اینگونه تغییر می یابد.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$r'_{xx}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n) x(n+m)$$

تخمین $r'_{xx}(m)$ تخمینی بی بایاس است

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(r'_{xx}(m)) = \varphi_{xx}(m)$$

$$Var(r'_{xx}(m)):$$

و به سمت صفر می رود. ولی مقدار واریانس برای m های بزرگ (نزدیک N) نسبتاً بزرگ می گردد. لذا از رابطه تخمینی دیگری استفاده می شود.

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n) x(n+m)$$

این رابطه جدید دارای بایاس است

$$E(r_{xx}(m)) = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \varphi_{xx}(m)$$

. این رابطه وقتی $N \rightarrow \infty$ میل میکند واریانس کمتری دارد

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(r_{xx}(m)) = \varphi_{xx}(m)$$

و تخمین معتبری از $\varphi_{xx}(m)$ را می دهد. در نتیجه میانگین و خود همبستگی با

$$\begin{cases} \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \\ r_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n) x(n+m) \end{cases}$$

تخمین زده می شود. مفروضات این تخمین آن بود که $x(n)$ حداقل از نظر میانگین و خودهمبستگی ایستا و ارگودیک باشد.


۱۲. فرایند و نویز سفید: به فرایندی که در آن

$$E(x(m), x(n)) = \begin{cases} \sigma_x^2 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

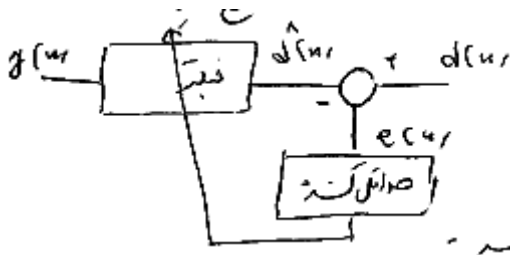
باشد فرایند تصادفی سفید می گویند که در آن

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\omega) &= \sigma_x^2 \delta(\omega) + m_x^2 \\ S_{xx}(\omega) &= \sigma_x^2 + 2\pi m_x^2 \delta(\omega) \end{aligned}$$

است فرایند سفیدی که میانگین آن صفر باشد نویز سفید خوانده می شود.

$$w_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{k+1}(l) = \sigma^r \varphi_k(l) \\ s_{k+1}(l) = \sigma^r s_k(l) \end{cases}$$


۲-۷ فیلتر وینر Wiener Filter



سیگنال آلوده به نویز $y(n)$ و سیگنال مطلوب $d(n)$ فرض داده شده است. هدف طرح فیلتری است که سیگنال $y(n)$ را فیلتر کرده به نحوی که خطای $e(n)$ حداقل گردد.

در این بحث فیلتر خطی در نظر گرفته می شود و خطا $e(n)$ به نحو بهینه ای حداقل می شود. از اینرو به این فیلتر، فیلتر بهینه خطی *Linear Optimum Filter* می گویند. برای حداقل کردن از روش حداقل مربعات خطا استفاده می شود

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n) \\ = d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(n-k) \Rightarrow J = E(e(n) e^*(n)) = E(|e(n)|^2) \quad n=0, \dots, \infty$$

فیلتر می تواند *FIR* یا *IIR* باشد. که در اینجا فیلتر *FIR* استفاده شده است.

$$J = E[(d(n) - \varphi'(n-k)\theta)(d(n) - \varphi'(n-k)\theta)^*] \\ \theta' = [a_0, a_1, \dots, a_{M-1}], \quad \varphi'(n-k) = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-M+1)] \\ J = E(|d(n)|^2) - 2E(d(n)\varphi'(n-k)\theta) + \theta'E(\varphi'(n-k)\varphi'(n-k)^*)\theta$$

از حداقل کردن J نسبت به پارامترها رابطه *Wiener-Hopf* بدست می آید.

$$= \sigma_d^2 - \rho'\theta - \theta'\rho + \theta'R\theta \Rightarrow \frac{dJ}{d\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = R^{-1}\rho \Rightarrow$$

و مقدار حداقل خطا برابر مقدار ذیل می شود.

$$J_{min} = \sigma_d^2 - \rho'R^{-1}\rho$$

در این رابطه R ماتریس همبستگی خودی y و P بردار همبستگی متقابل d و y است.

$$R = \begin{bmatrix} r_{yy}(0) & & \\ & r_{yy}(M-1) & \\ & & r_{yy}(0) \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} r_{dy}(0) \\ \vdots \\ r_{dy}(M-1) \end{bmatrix}$$

فیلتر محاسبه شده بهینه خواهد بود اگر مشخصات آماری مفروض، مطابق واقع باشد. در غیر اینصورت جواب بهینه نیست. در عمل بهینه بودن به دقت مشخصات آماری y و d (R, P) که ارائه می شوند بستگی دارد. از آنجا که فقط یک تابع نمونه از مشاهدات *sample function* وجود دارد، تخمین به شرط ارگودیک بودن فرایند معتبر است

در فرض فیلتر وینر ثابت بودن مشخصات آماری سیگنال و نویز وجود دارد به این معنی که مشخصات سیگنال باید ثابت با زمان و نویز ایستا باشد. این فرض اگر محقق نگردد جواب بهینه نیست. در بسیاری از کاربردها مشخصات آماری d و y با زمان تغییر می کند بنابراین باید از روشهای وفقی برای دسترسی به جواب بهینه سود برد که تغییرات مشخصات آماری را دنبال می

کند.

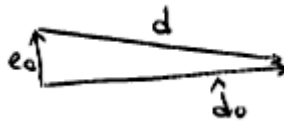
اصل تعامد Orthogonality Principle

اگر حداقل $e(n)$ ، $e_0(n)$ باشد، بر تمامی ورودیهایی که در فرایند تخمین وارد می شوند عمود است.

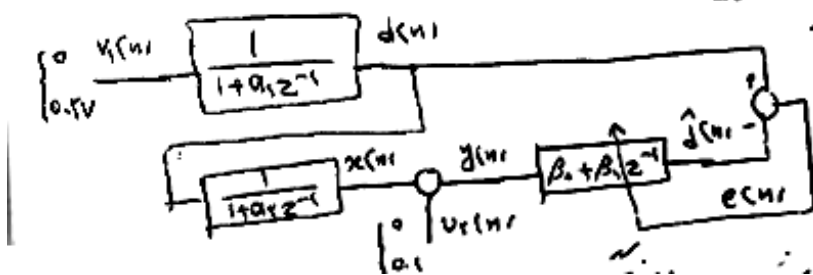
$$j = E(e'(n)) \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial a_k} = E\left(r \frac{\partial e(n)}{\partial a_k}\right) = -r E(y(n-k)e(n)) = 0$$

به این ترتیب

$$E(\hat{d}(n)e(n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k E(y(n-k)e(n)) \Rightarrow E[\hat{d}(n)e(n)] = 0$$



مثال: نویز سفید $v_1(n)$ از سیستم درجه ۱ با $a_1=0.8485$ عبور کرده و سیگنال $d(n)$ بدست آمده است. سیگنال $d(n)$ از کانالی درجه ۱ با $a_2=0.9458$ عبور کرده و نویز سفید $v_2(n)$ به آن اضافه شده و دریافت گردیده است. $d(n)$ را از خروجی $y(n)$ با فیلتری ۲ پارامتری تخمین بنزید.



$$e(n) = d(n) - \beta_0 y(n) - \beta_1 y(n-1), \theta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\theta} = R_y^{-1} p_y \therefore R_y = \begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(1) \\ r_{yy}(1) & r_{yy}(0) \end{bmatrix}, p_y = \begin{bmatrix} r_{dy}(0) \\ r_{dy}(1) \end{bmatrix}$$

با فرض مستقل بودن $v_1(n)$ و $v_2(n)$ بدست می آوریم

$$R_y = R_{v1} + R_x \quad R_{v1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, R_{v2} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0 \\ 0 & 0.24 \end{bmatrix}$$

$$x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) = u(n)$$

طبق روابط

$$r_x(0) = \frac{1+a_1}{1-a_1} \frac{\sigma_{v1}^2}{(1+a_1)^2 - a_1^2} = 1, r_x(1) = \frac{-a_1}{1+a_1} = -0.5 \Rightarrow R_y = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$r_{dy}(k) = E(y(n+k)d(n)) = E(x(n+k)d(n))$$

$$= E[x(n+k)[x(n) + a_2 x(n-1)]] = r_{xx}(k) + a_2 r_{xx}(k-1)$$

$$\Rightarrow r_{dy}(0) = r_{xx}(0) + \alpha_1 r_{xx}(-1) = 1 - 0.4458 \times 0.5 = 0.7771$$

$$r_{dy}(1) = r_{xx}(1) + \alpha_1 r_{xx}(0) = 0.5 - 0.4458 \times 1 = -0.4458$$

$$\Rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.7771 \\ -0.4458 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.7771 \\ -0.4458 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7771 \\ -0.4458 \end{bmatrix} \Rightarrow j_{\min} = 0.1579$$

۳-۷ پیش بینی خطی Linear Prediction

در LP قرار است بر اساس $\{y(0), \dots, y(n-1)\}$ تخمینی از $y(n)$ تعیین گردد. مسئله بصورت ذیل طرح و حل می شود.

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)$$

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n) = y(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) = y(n) - \Phi'(n) \theta$$

$$\Rightarrow \theta = R^{-1} p \quad \theta' = [a_1, \dots, a_{M-1}], \quad \Phi'(n) = [y(n-1), \dots, y(n-M+1)]$$

$$R = \begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(M-1) \\ r_y(M-1) & r_y(0) \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(M-1) \end{bmatrix}$$

به این روش Forward LP گفته می شود.

در Backward LP تخمین $y(M)$ بر اساس مشاهدات آینده فرموله می شود.

$$y(n-M) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k+1) \Rightarrow e(n) = y(n-M) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k+1)$$

$$= y(n-M) - \Phi' \theta$$

$$\Phi' = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-M+1)] \quad \theta' = [a_1, \dots, a_M]$$

$$\hat{\theta} = R^{-1} p, \quad p = \begin{bmatrix} r(M) \\ \vdots \\ r(1) \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r(0) & r(M-1) \\ r(M-1) & r(0) \end{bmatrix}$$

۴-۷ فیلتر کالمن Kalman Filter

فیلتر کالمن حالت کلی تر فیلتر وینر است که بصورت فضای حالت نوشته می شود ضمن اینکه حل معادلات بصورت بازگشتی است

راه حل بازگشتی برای Minimum Mean Squares

فرض کنید مشاهدات $Y_n = \{y(1), \dots, y(n)\}$ با فرض $y(n < 0) = 0$ در اختیار باشد هدف تخمینی $\hat{x}(n | Y_n)$ به روش بازگشتی به فرض وجود $\hat{x}(n-1 | Y_{n-1})$ است. ارتباط بین y و x خطی در نظر گرفته می شود. برای این منظور متغیر $\alpha(n) = y(n) - \hat{y}(n | Y_n)$ تعریف می گردد. که در آن

$$\hat{y}(n | Y_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k y(n-k)$$

است اگر LS برای $\alpha(n)$ محاسبه شود پارامترهای βk تعیین می گردند با توجه به معلوم بودن مشاهدات $y(n)$ و βk می توان $\alpha(n)$ را داشت و اگر $\alpha(n)$ و βk معلوم باشند $y(n)$ قابل محاسبه است. حال اگر مدل خطی بین x و y در نظر گرفته شود

$$\hat{x}(n | Y_n) = \sum_{k=1}^n \gamma_k y(k)$$

آنها به ترم α نیز می توان نوشت.

$$\hat{x}(n | Y_n) = \sum_{k=1}^n b_k \alpha(k)$$

که پارامترهای b_k از حداقل سازی

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n | y_n)$$

بدست آمده باشد که

$$b_k = \frac{E(x(n), \alpha(k))}{E(\alpha(k), \alpha(k))} \quad 1 \leq k \leq n$$

می شود. این رابطه را بصورت بازگشتی می توان نوشت که

$$\hat{x}(n | y_n) = \hat{x}(n-1 | y_{n-1}) + b_n (y_n - \hat{y}(n | y_n))$$

$$b_n = \frac{E(x(n), \alpha(n))}{E(\alpha(n), \alpha(n))}$$

باشد. این اساس معادلات بازگشتی است که کاربرد گسترده ای دارد.

فیلتر کالمن

مدل ذیل را برای سیستم در نظر بگیرید.

$$x(n+1) = Ax(n) + v_1(n)$$

$$y(n) = cx(n) + v_2(n)$$

که در آن x $(N \times 1)$ ، y (1×1) ، $v_1(n)$ نویز سفید $(N \times 1)$ و $v_2(n)$ نیز نویز سفید (1×1) است.

بردار مشاهدات $Yn=\{y(1),\dots,y(n)\}$ است.

هدف تخمین $\hat{x}(i|Yn)$ است. اگر $i > n$ باشد الگوریتم کار پیش بینی، اگر $i = n$ باشد عمل فیلتر کردن و اگر $0 < i < n$ باشد کار هموار سازی $smoothing$ را انجام می دهد.

برای این منظور $\alpha(n)$ که $innovation\ sequence$ خوانده می شود تعریف می گردد.

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= y(n) - \hat{y}(n|Yn) = y(n) - C \hat{x}(n|Yn) + \hat{v}_1(n) \\ &= C[x(n) - \hat{x}(n|Yn)] + v_2(n) = Ce(n) + v_2(n)\end{aligned}$$

مدل خطی تخمین

$$\hat{x}(i|Yn) = \sum_{k=1}^n b_i(k) \alpha(k)$$

و تابع خطا از این قرار هستند.

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n|Yn)$$

$$e(i,n) = x(i) - \hat{x}(i|Yn) = x(i) - \sum_{k=1}^n b_i(k) \alpha(k)$$

با حداقل کردن خطا به روش $Minimum\ Mean\ Aquare\ Errirs(MMSE)$ بدست می آید.

$$\begin{aligned}E(|\alpha(m)|^2) b_i(m) &= E[x(i)\alpha(m)] \Rightarrow R(m) b_i(m) = P_{x,\alpha}(i,m) \Rightarrow \\ b_i(m) &= R^{-1}(m) P_{x,\alpha}(i,m)\end{aligned}$$

با جایگزینی در رابطه $\hat{x}(i|Yn)$ بدست می آید.

$$\hat{x}(i|Yn) = \sum_{k=1}^{n-1} R^{-1}(k) P_{x,\alpha}(i,k) \alpha(k) + R^{-1}(n) P_{x,\alpha}(i,n) \alpha(n)$$

برای $i = n+1$ که حالت پیش بینی است خواهیم داشت

$$\hat{x}(n+1|Yn) = \sum_{k=1}^{n-1} R^{-1}(k) P_{x,\alpha}(n+1,k) \alpha(k) + R^{-1}(n) P_{x,\alpha}(n+1,n) \alpha(n)$$

برای اینکه $\hat{x}(n+1|Yn)$ را بر اساس $\hat{x}(n|Yn-1)$ می نویسیم

$$\begin{aligned}E[x(n+1)\alpha(k)] &= E[\{A x(n) + v_1(n)\} \alpha(k)] = A E[x(n)\alpha(k)] \Rightarrow \\ P_{x,\alpha}(n+1,k) &= A P_{x,\alpha}(n,k) \Rightarrow \\ \hat{x}(n+1|Yn) &= A \hat{x}(n|Yn-1) + R^{-1}(n) P_{x,\alpha}(n+1,n) \alpha(n) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\hat{x}(n+1|Yn) = A \hat{x}(n|Yn-1) + G(n) \alpha(n)$$

که بهره کالمن برابر است با

$$G(n) = R^{-1}(n) P_{x,\alpha}(n+1,n) = R^{-1}(n) E[x(n+1)\alpha(n)]$$

به این ترتیب فرمول محاسبه بازگشتی $\hat{x}(n+1)$ بدست می آید.

برای اینکه این روش قابل استفاده باشد روش مناسبی برای تعیین $G(n)$ باید ارائه شود.

$$\begin{aligned}E[x(n+1)\alpha(n)] &= A E[x(n)\alpha(n)] = A E[x(n)e'(n,n-1)] C' \\ &= A E[\{e(n,n-1) + \hat{x}(n|Yn-1)\} e'(n,n-1)] C' \\ &= A E[e(n,n-1)e'(n,n-1)] C' = A K(n,n-1) C' \Rightarrow \\ G(n) &= A K(n,n-1) C' R^{-1}(n)\end{aligned}$$

برای قابل استفاده بودن روش k نیز باید به روش بازگشتی قابل محاسبه گردد.

$$K(n, n-1) = E[e(n, n-1)e'(n, n-1)]$$

که بصورت ذیل بدست می آید.

$$K(n+1, n) = A K(n) A' + Q_1(n)$$

$$K(n) = K(n, n-1) - A G(n) C K(n, n-1)$$

که در آن $Q_1(n)$ ماتریس همبستگی خودی نویز $v_1(n)$ است.

به این ترتیب روابط فیلتر کالمن بدست می آید. روابط ذیل برای سیستم وابسته به زمان نوشته شده است.

Variable	Definition	Dimension
$x(n)$	State vector at time n	M -by-1
$y(n)$	Observation vector at time n	N -by-1
$F(n+1, n)$	State transition matrix from time n to $n+1$	M -by- M
$C(n)$	Measurement matrix at time n	N -by- M
$Q_1(n)$	Correlation matrix of process noise vector $v_1(n)$	M -by- M
$Q_2(n)$	Correlation matrix of measurement noise vector $v_2(n)$	N -by- N
$\hat{x}(n+1 y_n)$	Predicted estimate of the state vector at time $n+1$, given the observation vectors $y(1), y(2), \dots, y(n)$	M -by-1
$\hat{x}(n y_n)$	Filtered estimate of the state vector at time n , given the observation vectors $y(1), y(2), \dots, y(n)$	M -by-1
$G(n)$	Kalman gain at time n	M -by- N
$\alpha(n)$	Innovations vector at time n	N -by-1
$R(n)$	Correlation matrix of the innovations vector $\alpha(n)$	N -by- N
$K(n+1, n)$	Correlation matrix of the error in $\hat{x}(n+1 y_n)$	M -by- M
$K(n)$	Correlation matrix of the error in $\hat{x}(n y_n)$	M -by- M

TABLE 7.2 SUMMARY OF THE KALMAN FILTER BASED ON ONE-STEP PREDICTION

<i>Input vector process</i>	
Observations = $\{y(1), y(2), \dots, y(n)\}$	
<i>Known parameters</i>	
State transition matrix = $F(n+1, n)$	
Measurement matrix = $C(n)$	
Correlation matrix of process noise vector = $Q_1(n)$	
Correlation matrix of measurement noise vector = $Q_2(n)$	
<i>Computation: $n = 1, 2, 3, \dots$</i>	
$G(n) = F(n+1, n)K(n, n-1)C'(n)[C(n)K(n, n-1)C'(n) + Q_2(n)]^{-1}$	
$\alpha(n) = y(n) - C(n)\hat{x}(n y_{n-1})$	
$\hat{x}(n+1 y_n) = F(n+1, n)\hat{x}(n y_{n-1}) + G(n)\alpha(n)$	
$K(n) = K(n, n-1) - F(n, n+1)G(n)C(n)K(n, n-1)$	
$K(n+1, n) = F(n+1, n)K(n)F'(n+1, n) + Q_1(n)$	
<i>Initial conditions:</i>	
$\hat{x}(1 y_0) = E\{x(1)\}$	
$K(1, 0) = E\{(x(1) - E\{x(1)\})(x(1) - E\{x(1)\})'\} = \Pi_0$	

